Analisi, stima e previsione di dati, esercitazione in LADISPE, 7 Giugno 2007

Identificazione di modelli per le dinamiche verticali di autoveicoli: parte V

Introduzione

Il sistema in Figura 1 rappresenta un modello quarter-car per le dinamiche verticali di un autoveicolo.

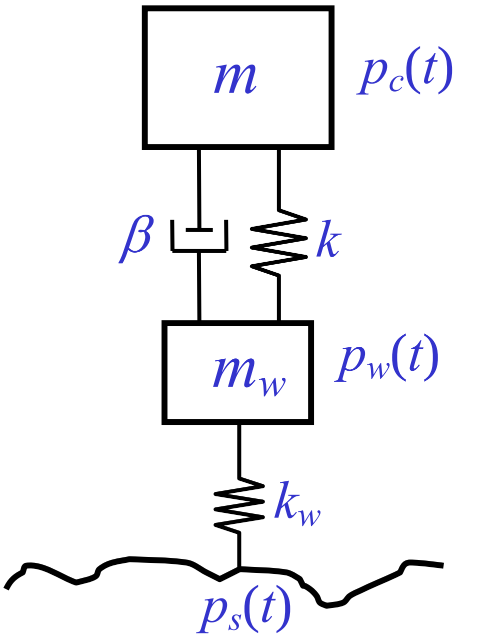

Figura 1

Variabili:
$p_c(t)$ = posizione verticale di ¼ di cassa del veicolo (m)
$p_w(t)$ = posizione verticale della ruota (m)
$p_s(t)$ = altezza del profilo stradale in corrispondenza della ruota (m)

Costanti:
m = massa di ¼ di veicolo (Kg)
m_w = massa della ruota (Kg)
k = costante elastica della sospensione (N/m)
β = coefficiente di attrito viscoso ammortizzatore (N*s/m)
k_w = costante elastica del pneumatico (N/m)

Le equazioni differenziali che descrivono il modello quarter-car sono:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{p}_c &= -\beta(\dot{p}_c - \dot{p}_w) - k(p_c - p_w) \\
m_w\ddot{p}_w &= \beta(\dot{p}_c - \dot{p}_w) + k(p_c - p_w) - k_w(p_w - p_s)
\end{aligned}
$$

Ponendo $x = [p_c \quad p_w \quad \dot{p}_c \quad \dot{p}_w]^T$, $u = p_s$, $y = p_c$, si ottengono le seguenti equazioni di stato:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\
y(t) &= C_c x(t)
\end{aligned}
\qquad
A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{\beta}{m} & \frac{\beta}{m} \\ \frac{k}{m_w} & -\frac{k+k_w}{m_w} & \frac{\beta}{m_w} & -\frac{\beta}{m_w} \end{bmatrix},\quad
B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_w}{m_w} \end{bmatrix},\quad
C_c = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]
$$

Discretizzando questo sistema col metodo di Eulero esplicito, si ha:

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\
y(k) &= Cx(k)
\end{aligned}
\qquad A = I + T_s A_c,\ B = T_s B_c,\ C = C_c \tag{1}
$$

dove T_s è il tempo di campionamento.

La funzione di trasferimento del sistema (1) è data da:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z + b_2}{z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4}$$

dove i coefficienti $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2$ dipendono dai parametri m, m_w, k, β, k_w, T_s.

Considerando che la variabile complessa z rappresenta l'operatore di traslazione temporale: $z^{-1}y(k)=y(k-1)$, possiamo scrivere il sistema quarter-car in forma di regressione lineare:

$$y(k+1) = -a_1 y(k) - \ldots - a_4 y(k-3) + b_1 u(k-2) + b_2 u(k-3) \quad (2)$$

Generazione dei dati

(1.1) Definire i coefficienti $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2$ del sistema (2) su un file Matlab usando i seguenti valori dei parametri: m=1585/4 Kg, m_w=40 Kg, k=17500 N/m, β=2500 N*s/m, k_w=2e5 N/m, T_s=0.005 s. I coefficienti $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2$ possono essere calcolati numericamente mediante il comando Matlab tfdata applicato al sistema (1) definito mediante il comando ss. Il sistema (2) con questi valori dei parametri è detto *sistema vero*.
Il vettore dei *parametri veri* è indicato con p^o.

(1.2) Simulare il sistema (2) usando come ingresso i primi 1000 dati di profilo stradale contenuti nel file profilo_random_005.mat. Il segnale di uscita risultante sia indicato con y_m. Dopo la simulazione, corrompere il segnale di ingresso con un rumore uniforme (comando rand) con valor medio nullo e ampiezza A_d=4e-4. Il segnale di ingresso corrotto da rumore sia indicato con u_m. I dati (u_m, y_m) costituiscono l'*insieme di identificazione*.

Identificazione di modelli input-output del IV ordine

Il problema è stimare i parametri $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2$.

(2.1) Stima minimi quadrati:

$$\hat{p} = QY, \quad Q = \left(L^T L\right)^{-1} L^T, \quad L = \begin{bmatrix} -y_m(4) & \cdots & -y_m(1) & u_m(2) & u_m(1) \\ -y_m(5) & \cdots & -y_m(2) & u_m(3) & u_m(2) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y_m(N-1) & \cdots & -y_m(N-4) & u_m(N-3) & u_m(N-4) \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_m(5) \\ y_m(6) \\ \vdots \\ y_m(N) \end{bmatrix}$$

dove N=1000 è la lunghezza del segnale y_m. Il sistema (2) con i valori dei parametri ottenuti da questa stima è indicato con M4($\hat{p}$).

(2.2) Calcolo degli intervalli statistici di incertezza di $\hat{p}$:

$$IS_i = [\hat{p}_i - 3\sqrt{V_{ii}}, \hat{p}_i + 3\sqrt{V_{ii}}]$$

$$V = \hat{\sigma}_v^2 \left(L^T L\right)^{-1} \cong Var(\hat{p}), \quad \hat{\sigma}_v^2 = Var(v)$$

dove $v = Y - L\hat{p}$ è la *serie temporale dei residui*.

Se v fosse rumore bianco gaussiano, si avrebbe $p^o \in IS$ con probabilità 99%.

(2.3) Calcolo degli EUI^{∞} :

$$EUI_i^{\infty} = [\hat{p}_i^m, \hat{p}_i^M]$$
$$\hat{p}_i^m = \sum_{l=1}^{N_Y} Q_{il}\left[Y_l - \varepsilon\,\mathrm{sign}(Q_{il})\right], \quad \hat{p}_i^M = 2\hat{p}_i - \hat{p}_i^m$$

dove N_Y è la lunghezza di *Y*.

Assumere: $\varepsilon = \max(|v|)$. Se il valore assunto di ε è corretto allora si ha che $p^o \in EUI^{\infty}$.

(2.4) Calcolo dei PUI^{∞} :

$$PUI_i^{\infty} = [p_i^m, p_i^M]$$
$$p_i^m = \min_{p \in \Re^6} p_i, \quad p_i^M = \max_{p \in \Re^6} p_i$$

dove i problemi di ottimizzazione sono soggetti ai vincoli:

$$Lp \le Y + \varepsilon$$
$$Lp \ge Y - \varepsilon$$

dove il valore di ε è quello assunto nel punto precedente.
Per risolvere tali problemi di ottimizzazione utilizzare il comando Matlab linprog.
Se il valore assunto di ε è corretto allora si ha che $p^o \in PUI^{\infty} \subseteq EUI^{\infty}$.
Si definisca la stima centrale:

$$p^c = \frac{p^m + p^M}{2}$$

Il sistema (2) con i valori dei parametri dati da questa stima è indicato con M4(p^c).

(2.5) Paragonare i modelli M4($\hat{p}$) e M4(p^c) in predizione ad un passo e in simulazione sull'insieme di identificazione. Come criteri di paragone considerare l'errore RMSE e l'andamento delle uscite rappresentato graficamente.

(2.6) Simulare il sistema (2) con i parametri veri p^o. Come ingresso usare i dati dal 1001-esimo all'ultimo del profilo random. Il segnale di uscita risultante sia indicato con y_v. Dopo la simulazione, corrompere il segnale di ingresso con un rumore uniforme (comando rand con seed diverso da quello usato nel punto 1.3) con valor medio nullo e ampiezza A_d=4e-4. Il segnale di ingresso corrotto da rumore sia indicato con u_v. I dati (u_v, y_v) costituiscono l'*insieme di validazione*.

(2.7) Paragonare i modelli M4($\hat{p}$) e M4(p^c) in predizione ad un passo e in simulazione sull'insieme di validazione. Come criteri di paragone considerare l'errore RMSE e l'andamento delle uscite rappresentato graficamente.